$=-i\cos\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}]=\cos\frac{\varphi}{2}[\cos(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})]$

• $\varphi \in]0,\pi[\Leftrightarrow 0<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{2}>0$

D'où $z-i=\left[\cos\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]$.

⊞ $\frac{z}{z-i}=\frac{[\sin\frac{\varphi}{2};\frac{\varphi}{2}]}{[\cos\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}]}=\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3) ★ Désignons par E={M(z − i) ∈ P tel que φ varie sur]0, π[}.

• $z-i=\frac{1}{2}\sin\varphi+i\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)$.

$M(x,y)\in E \Leftrightarrow \exists\varphi\in]0,\pi[$ tel que $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)\end{cases}$

▸ $\varphi\in]0,\pi[\Leftrightarrow 0<\sin\varphi\le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{2}\sin\varphi\le\frac{1}{2}$

Ainsi $\underline{0<x\le\frac{1}{2}}$

▸ $\varphi\in]0,\pi[\Leftrightarrow -1<-\cos\varphi<1 \Leftrightarrow -2<-\cos\varphi-1<0$

$\Leftrightarrow -1<\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)<0$

$\Leftrightarrow \underline{-1<y<0}$

▸ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=\frac{1}{2}(-\cos\varphi-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sin\varphi \\ -2y-1=\cos\varphi\end{cases}$

Or $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \Leftrightarrow (2x)^2+(-2y-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Conclusion : E : $\begin{cases} 0<x\le\frac{1}{2} \\ -1<y<0 \\ x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\end{cases}$

Nommons A et B les points du plan de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et (0, -1). Désignons par $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Enfin E est le demi-cercle de $\mathscr{C}$ d'extrimités O et B et passant par A privé de O et B.

★ Désignons par F={N$\left(\frac{z}{z-i}\right)$ ∈ P tel que φ varie sur]0, π[}

• $\frac{z}{z-i}=\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]=(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})i$.